UNIVERSITE HASSAN II – AIN CHOCK

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ELECTRICITE ET DE MECANIQUE

CONCOURS D'ACCES EN 1 ère ANNEE

2010-2011

DEUD MP, PC

Attention :

Les candidats doivent obligatoirement rédigées les deux parties Analyse et Algèbre sur deux copies séparées.

Exercice 1 :

1. Soit n un nombre entier naturel non nul, on considère les deux fonctions θ_n et θ_n définies sur $[0,1[$ par :

$$\theta_n(x) = \ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \theta_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

a) Après avoir justifié leur existence, déterminer les fonctions dérivées θ'_n et θ'_n.

b) En déduire l'égalité :

$$\forall x \in [0,1[\ ,\ \ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n}\right) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt .$$

2. a) démontrer que : $\forall x \in [0,1[\ ,\ 0 \le \theta_n(x) \le x^n \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

b) démontrer que la fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\theta_n(x)}{x}$ est prolongeable par conti

3. a) justifier l'existence de $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$

b) démontrer l'égalité :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{n}\right)dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_n(}{x}$$

c) en déduire que si $u_k = \frac{1}{2^k \times k^2}$ alors $\sum_{k=1}^{n} u_k = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_n(}{x}$

d) démontrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_n(x)}{x}\,dx \le \ln(2) \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\,dx$

Exercice 2 :

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans lui-même et qui admet 2π pour pé

On pose $\|f\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

1. a) Soient $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Etablir les égalités :

$$1+2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$$

et

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt$$

b) On pose, pour $r \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, $\quad F(x,r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)f(t)}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt$

Montrer que $\quad F(x,r)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} r^n(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$

Où, pour tout entier $n \geq 0$, $\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ et $\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

c) Pour $\eta \in]0,\frac{\pi}{2}]$ établir l'égalité

$$F(x,r)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\eta}^{x+\eta}\frac{(1-r^2)(f(t)-f(x))}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{x+\eta}^{x+2\pi-\eta}\frac{(1-r^2)(f(t)-f(x))}{1-2r\cos(t-x)+r^2}dt$$

d) En déduire, l'inégalité

$$|F(x,r)-f(x)| \leq \sup_{|t-x|\leq\eta}|f(t)-f(x)|+2\,\frac{1-r^2}{1-\cos\eta}\|f\|$$

e) Montrer que lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures $F(x,r)$ tend vers $f(x)$ uniformément par rapport à x sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $r \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\quad \varphi(x,r)=Arctg\frac{r\sin x}{1-r\cos x}$

a) Montrer que la dérivée partielle φ_x' de φ par rapport à x vérifie

$$\varphi_x'(x,r)=\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\cos(nx)$$

b) En déduire les égalités

$$\varphi(x,r)=\sum_{n=1}^{+\infty} r^n\frac{\sin(nx)}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(x,r)f(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n b_n}{n}$$